成都市2022级高中毕业班第二次诊断性检测

数学参考答案及评分意见

一、选择题:(每小题5分,共40分)

1. A;　2. B;　3. C;　4. C;　5. D;　6. D;　7. A;　8. A.

二、选择题:(每小题6分,共18分)

9. ACD;　10. ABD;　11. ABD.

三、填空题:(每小题5分,共15分)

12. 10;　13. -2;　14. 2.

四、解答题:(共77分)

15. 解:(1)因为$\sqrt{3}c=2a\sin C$,

在$\triangle ABC$中,由正弦定理可得$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$,

所以$\sqrt{3}\sin C=2\sin A\sin C$.　……2分

因为$\sin C>0$,所以$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　……4分

又$A\in(0,\pi)$,所以$A=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$.　……6分

(2)由题意$a+b+c=3+\sqrt{3}$,因为$a=\sqrt{3}$,所以$b+c=3$.　……7分

在$\triangle ABC$中,由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

当$A=\dfrac{2\pi}{3}$时,$3=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc=9-bc$,整理得$bc=6$.　……8分

联立$b+c=3$得$b^2-3b+6=0$.此方程无实数解.　……10分

当$A=\dfrac{\pi}{3}$时,$3=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc=9-3bc$,整理得$bc=2$.　……11分

联立$b+c=3$得$b^2-3b+2=0$.解得$b=1$或$b=2$.

所以,当$A=\dfrac{2\pi}{3}$时,b无解;当$A=\dfrac{\pi}{3}$时,$b=1$或$b=2$.　……13分

16. 解:(1)连接AC交BD于点O,连接EO.则EO是$\triangle PAC$的中位线,从而$EO\parallel PA$,
……2分

又因为$EO\subset$平面EDB,$PA\not\subset$平面EDB,　……3分

所以$PA\parallel$平面EDB.　……4分

(2)因为 $PD\perp$底面 $ABCD$,因为 $BC\subset$平面 $ABCD$,所以 $PD\perp BC$.

因为 $ABCD$ 是正方形,所以 $CD\perp BC$.

又 $PD\cap CD=D$,且 $PD\subset$平面 PDC,$CD\subset$平面 PDC,

所以 $BC\perp$平面 PDC. ……6 分

因为 $DE\subset$平面 PDC,所以 $BC\perp DE$.

因为$\triangle PDC$ 是等腰直角三角形,E 是底边 PC 的中点,所以 $PC\perp DE$.

又 $PC\cap BC=C$,且 $PC\subset$平面 PBC,$BC\subset$平面 PBC,

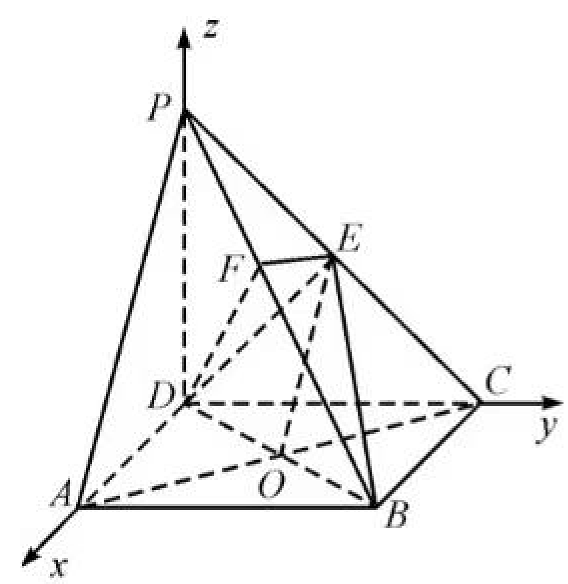
所以 $DE\perp$平面 PBC. ……8 分

因为 $PB\subset$平面 PBC,所以 $DE\perp PB$.

又 $EF\perp PB$,$EF\cap DE=E$,且 $DE\subset$平面 EFD,$EF\subset$平面 EFD,

所以 $PB\perp$平面 EFD. ……9 分

(3)在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PD\perp$底面 $ABCD$,AD,$DC\subset$底面 $ABCD$,所以 $PD\perp AD$,$PD\perp DC$,由底面 $ABCD$ 是正方形,得 $AD\perp DC$,



以 D 为原点,DA,DC,DP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示空间直角坐标系,

设 $DC=2$,则 $A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$C(0,2,0)$,$P(0,0,2)$,

$\overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$,$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$,

设平面 CPB 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=0.\end{cases}$所以$\begin{cases}2x_1=0,\\2y_1-2z_1=0.\end{cases}$

取 $y_1=1$,可得 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$是平面 CPB 的一个法向量. ……11 分

$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{DP}=(0,0,2)$,而$\overrightarrow{CA}=(2,-2,0)$,

则$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}=2\times2-2\times2=0$,$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{CA}=0$,

即$\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{DP}\perp\overrightarrow{CA}$. 所以平面 PBD 的一个法向量为$\overrightarrow{CA}=(2,-2,0)$. ……13 分

因此 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CA}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CA}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$, ……14 分

所以平面 CPB 与平面 PBD 的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$. ……15 分

17. 解:(1)由椭圆的定义,结合$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2a(a>1)$知:

椭圆 C 与抛物线Γ:$y^2=2px(p>0)$的共同焦点 F 的坐标为$(1,0)$, ……1 分

则$\dfrac{p}{2}=1$,抛物线 Γ 的方程为 $y^2=4x$; ……3 分

由$|PF|=\dfrac{5}{3}$,不妨设点 P 在第一象限,则点 P 的坐标为$(\dfrac{2}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$. ……4 分

记椭圆的左焦点 $F_1(-1,0)$，所以 $|PF_1|^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{49}{9}$，则 $|PF_1|=\frac{7}{3}$，

所以 $|PF_1|+|PF|=4=2a$，即 $a=2,c=1,b=\sqrt{3}$.

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……6 分

(2)由题可知，直线 l 的斜率不为 0，故设直线 l 的方程为 $x=my+1$，

$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),A(x_3,y_3),B(x_4,y_4)$，

由 $|MF|\cdot|NF|=2|AF|\cdot|BF|$，

得 $\sqrt{1+m^2}|y_1|\cdot\sqrt{1+m^2}|y_2|=2\sqrt{1+m^2}|y_3|\cdot\sqrt{1+m^2}|y_4|$，

即 $|y_1y_2|=2|y_3y_4|$. ……9 分

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$，$\Delta>0$ 恒成立，所以 $y_1y_2=-4$. ……11 分

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，$\Delta>0$ 恒成立，所以 $y_3y_4=\frac{-9}{3m^2+4}$.

……13 分

由 $|y_1y_2|=2|y_3y_4|$，得 $4=2\times\frac{9}{3m^2+4}$，解得 $m=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

所以直线 l 的方程为 $\sqrt{6}x-y-\sqrt{6}=0$ 或 $\sqrt{6}x+y-\sqrt{6}=0$. ……15 分

18. 解：(1)设事件 A=“一轮答题中系统派出通识题”，事件 B=“该选手在一轮答题中答对”，

由题意可知 $P(B|A)=\frac{3}{5}$，$P(B|\bar{A})=\frac{1}{5}$， ……1 分

由全概率公式得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{3}$.

……3 分

故该选手在一轮答题中答对题目的概率为 $\frac{1}{3}$. ……4 分

(2)设事件 B_n=“该选手第 n 轮答对题目”，

(i)因为各轮答题正确与否相互独立，

由(1)知：$P(B_n)=\frac{1}{3}$，那么 $P(\overline{B_n})=1-P(B_n)=\frac{2}{3}$，

当 $n=1$ 时，挑战显然不会终止，即 $p_1=1$，

当 $n=2$ 时，则第 1,2 轮至少答对一轮，$p_2=1-P(\overline{B_1}\,\overline{B_2})=1-P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})=\frac{5}{9}$，

由概率加法公式得 $p_3=P(B_3)p_2+P(B_2\overline{B_3})p_1=P(B_3)p_2+P(B_2)P(\overline{B_3})p_1$

$=\frac{1}{3}\times\frac{5}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times1=\frac{11}{27}$, ……7 分

同理 $p_4=P(B_4)p_3+P(B_3\overline{B_4})p_2=P(B_4)p_3+P(B_3)P(\overline{B_4})p_2$

$=\frac{1}{3}\times\frac{11}{27}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{5}{9}=\frac{7}{27}$. ……10 分

(ii)设事件 C_n="第 n 轮结束时挑战未终止",

当 $n\geqslant3$ 时,第 n 轮结束时挑战未终止的情况分为两种:

①第 n 轮答对,且第 $n-1$ 轮结束时挑战未终止;

②第 n 轮答错,第 $n-1$ 轮答对,且第 $n-2$ 轮结束时挑战未终止.

所以第 n 轮结束时挑战未终止可表示为 $C_n=C_{n-1}B_n\cup C_{n-2}\overline{B_n}B_{n-1}$,

所以 $P(C_n)=P(C_{n-1})P(B_n|C_{n-1})+P(C_{n-2})P(\overline{B_n}B_{n-1}|C_{n-2})$,

因为各轮答题正确与否相互独立,

所以 $P(C_n)=P(C_{n-1})P(B_n)+P(C_{n-2})P(\overline{B_n}B_{n-1})=\frac{1}{3}P(C_{n-1})+\frac{2}{9}P(C_{n-2})$,

即当 $n\geqslant3$ 时,有 $p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{9}p_{n-2}$. ……14 分

设存在实数 λ,使得数列$\{p_{n+1}-\lambda p_n\}$是公比为 $q(q\neq0)$的等比数列,

当 $n\geqslant2$ 时,有$(p_{n+1}-\lambda p_n)=q(p_n-\lambda p_{n-1})$,整理得 $p_{n+1}=(\lambda+q)p_n-\lambda qp_{n-1}$,

结合递推关系 $p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}p_{n-1}$,得$\begin{cases}\lambda+q=\frac{1}{3},\\-\lambda q=\frac{2}{9}.\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{3},\\q=\frac{2}{3}.\end{cases}$或$\begin{cases}\lambda=\frac{2}{3},\\q=-\frac{1}{3}.\end{cases}$

……16 分

当 $n=1$ 时,有 $p_2-\frac{2}{3}p_1=-\frac{1}{9}$,$p_2+\frac{1}{3}p_1=\frac{8}{9}$,

当 $\lambda=\frac{2}{3}$时,数列$\{p_{n+1}-\frac{2}{3}p_n\}$是首项为$-\frac{1}{9}$,公比为$-\frac{1}{3}$的等比数列,

当 $\lambda=-\frac{1}{3}$时,数列$\{p_{n+1}+\frac{1}{3}p_n\}$是首项为$\frac{8}{9}$,公比为$\frac{2}{3}$的等比数列,

所以存在实数 $\lambda=\frac{2}{3}$或$-\frac{1}{3}$,使得数列$\{p_{n+1}-\lambda p_n\}$为等比数列. ……17 分

19. 解:(1)即证明 $\forall a\geqslant0$,都有 $1+a^2\leqslant(a+1)^2\leqslant2(1+a^2)$.

因为$(a+1)^2-(1+a^2)=2a\geqslant0$,所以$(a+1)^2\geqslant1+a^2$. ……2 分

因为 $2(1+a^2)-(a+1)^2=a^2-2a+1=(a-1)^2\geqslant0$,所以$(a+1)^2\leqslant2(1+a^2)$.

所以集合$\{(a,b)|a\geqslant0,b=1\}$具有性质$(\frac{1}{2},1)$. ……4 分

(2)因为 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,a+b=1$，

$(1+a^2)(1+b^2)=1+a^2+b^2+a^2b^2=1+(a+b)^2-2ab+(ab)^2$

$=2-2ab+(ab)^2=(1-ab)^2+1.$ ……5 分

令 $u=1+ab$，因为 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $u\in[1,\frac{5}{4}]$. ……6 分

于是 $\forall u\in[1,\frac{5}{4}]$，有 $K_1[(2-u)^2+1]\leqslant u\leqslant K_2[(2-u)^2+1]$成立.

即 $K_1\leqslant\frac{u}{(2-u)^2+1}\leqslant K_2$.

也就是 $\forall u\in[1,\frac{5}{4}]$，有 $K_1\leqslant\frac{1}{u+\frac{5}{u}-4}\leqslant K_2$ 成立. ……8 分

令 $f(u)=u+\frac{5}{u}-4,u\in[1,\frac{5}{4}]$，

因为 $f(u)$在$[1,\frac{5}{4}]$单调递减，所以$\frac{5}{4}=f(\frac{5}{4})\leqslant f(u)\leqslant f(1)=2$.

从而$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{u+\frac{5}{u}-4}\leqslant\frac{4}{5}$.

所以 $K_2\geqslant\frac{4}{5}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时取等；$K_1\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=0$ 或 $b=0$ 时取等.

$K_2-K_1\geqslant\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$，所以 K_2-K_1 的最小值为$\frac{3}{10}$. ……10 分

(3)由题意 $K_1\leqslant\frac{(a+b)(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\leqslant K_2$.

注意到$(a+b)(1+ab)=a+a^2b+b+ab^2=a(1+b^2)+b(1+a^2)$.

所以 $K_2\geqslant\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}$. 又 $1+a^2\geqslant 2a,1+b^2\geqslant 2b$，

所以 $K_2\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，当且仅当 $a=b=1$ 取等(满足 $a^3+b^3=2$)，

所以 K_2 的最小值为 1. ……12 分

因为 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,a^3+b^3=2$，所以 $2=a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{a^3b^3}$，于是 $0\leqslant ab\leqslant 1$.

又 $2=a^3+b^3=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$，

令 $s=a+b,t=ab$，则 $s(s^2-3t)=2$，即 $t=\frac{s^3-2}{3s}$. ……13 分

又 $0\leqslant ab\leqslant 1$，所以 $0\leqslant\frac{s^3-2}{3s}\leqslant 1$. 解得$\sqrt[3]{2}\leqslant s\leqslant 2$.

所以$\dfrac{(a+b)(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}=\dfrac{(a+b)(1+ab)}{(a+b)^2+(1-ab)^2}=\dfrac{s(1+t)}{s^2+(1-t)^2}\geqslant\dfrac{s(1+t)}{s^2+1}$

$=\dfrac{s(1+\frac{s^3-2}{3s})}{s^2+1}=\dfrac{s^3+3s-2}{3(s^2+1)}$. ……14 分

令 $g(s)=\dfrac{s^3+3s-2}{s^2+1}$，$s\in[\sqrt[3]{2},2]$，则 $g'(s)=\dfrac{s^4+4s+3}{(s^2+1)^2}>0$，于是 $g(s)$在$[\sqrt[3]{2},2]$单调递增，又 $g(\sqrt[3]{2})=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^2+1}$，所以$\dfrac{(a+b)(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\geqslant\dfrac{g(s)}{3}\geqslant\dfrac{g(\sqrt[3]{2})}{3}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^2+1}$.

当且仅当 $a=0,b=\sqrt[3]{2}$或 $a=\sqrt[3]{2},b=0$ 时等号成立.

所以 K_1 的最大值为$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^2+1}$. ……16 分

又 K_2 的最小值为 1，

所以$\dfrac{K_1}{K_2}$的最大值为$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{2})^2+1}$. ……17 分